23. Пусть $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом 5, заданная на множестве действительных чисел, которая на промежутке $[-2; 3)$ совпадает с функцией $y = x^2$. Найдите $f(2013)$.

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 4; **Д)** 9.

24. Сколько всего существует решений $(x; y)$ уравнения $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ в действительных числах?

А) 1; **Б)** 5; **В)** 8; **Г)** 9; **Д)** бесконечно много.

25. Пусть $y = f(n)$ – функция, заданная на множестве целых неотрицательных чисел, такая, что $f(n) = n/2$, если n – четное, и $f(n) = (n-1)/2$, если n – нечетное. Пусть $f^k(n)$ обозначает композицию $f(f(...f(n)...))$, где f применяется k раз. Сколько решений имеет уравнение $f^{2013}(n) = 1$?

А) 0; **Б)** 4026; **В)** 2^{2012}; **Г)** 2^{2013}; **Д)** другой ответ.

26. На плоскости построено несколько прямых. Прямая a пересекает ровно 3 из этих прямых, а прямая b пересекает ровно 4 из этих прямых. Прямая c пересекает n прямых, где $n \neq 3, 4$. Сколько всего прямых нарисовано на плоскости?

А) 4; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 7; **Д)** невозможно определить.

27. Сумма первых n чисел натурального ряда равна трехзначному числу с тремя одинаковыми цифрами. Чему равна сумма цифр числа n?

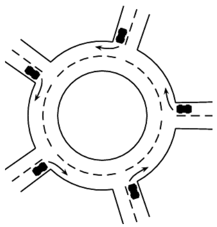
А) 6; **Б)** 9; **В)** 12; **Г)** 15; **Д)** 18.

28. На острове живут лжецы (всегда лгут) и правдивые (всегда говорят правду). Я встретил двух островитян – высокого и низкого – и спросил у высокого, оба ли они правдивые. Высокий ответил, но из его ответа я не смог понять, кто они. Поэтому я спросил низкого, является ли высокий правдивым. Низкий ответил, и я понял, кто они. Кто были высокий и низкий?

А) оба правдивые; **Б)** оба лжецы; **В)** высокий – правдивый, низкий – лжец;
Г) высокий – лжец, низкий – правдивый; **Д)** недостаточно данных чтобы определить.

29. Иван придумал алгоритм для получения последовательности натуральных чисел: $a_1 = 1$, $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$, где m и n – натуральные числа. Найдите значение a_{100}.

А) 100; **Б)** 1000; **В)** 2012; **Г)** 4950; **Д)** 5050.



30. Пять автомобилей одновременно въезжают на круговой перекресток (см. рис.). Каждый автомобиль должен покинуть перекресток, проехав менее круга. Никакие два автомобиля не должны уехать с перекрестка по одной и той же дороге. Сколько всего существует различных способов, как автомобили могут покинуть перекресток с соблюдением этих условий?

А) 22; **Б)** 44; **В)** 60; **Г)** 81; **Д)** 120.

Конкурс организован и проводится Общественным объединением «Белорусская ассоциация «Конкурс» совместно с Академией последипломного образования при поддержке Министерства образования Республики Беларусь.
220013, г. Минск, ул. Дорошевича, 3
тел. (017) 292 80 31, 290 01 53; e-mail: info@bakonkurs.by
http://www.bakonkurs.by/
ОО «Белорусская ассоциация «Конкурс». Заказ 29. Тираж 3800 экз. г. Минск. 2013 г.

Международный математический конкурс
«КЕНГУРУ-2013»

Четверг, 21 марта 2013 г.

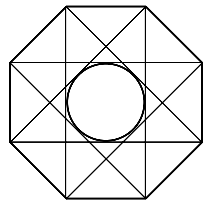
- продолжительность работы над заданием 1 час 15 минут;
- пользоваться учебниками, конспектами, калькуляторами и электронными средствами запрещается;
- за правильный ответ на задачу к баллам участника прибавляются баллы, в которые эта задача оценена;
- за неправильный ответ на задачу из баллов участника вычитается четверть баллов, в которые оценена эта задача, в то время, как не дав ответа, участник сохраняет уже набранные баллы;
- на каждый вопрос имеется только один правильный ответ;
- на старте участник получает авансом 30 баллов;
- максимальное количество баллов, которое может получить участник конкурса, – 150;
- объём и содержание задания не предполагают его полного выполнения; в задании допускаются вопросы, не входящие в программу обучения;
- самостоятельная и честная работа над заданием – главное требование организаторов к участникам конкурса;
- после окончания конкурса листок с заданием остаётся у участника;
- результаты участников размещаются на сайте http://www.bakonkurs.by/ через 1–1,5 месяца после проведения конкурса.

Задание для учащихся 11 класс

Задачи с 1 по 10 оцениваются по 3 балла

1. Какое из следующих чисел наибольшее?

А) 2013; **Б)** 2^{0+13}; **В)** 20^{13}; **Г)** 201^3; **Д)** $20 \cdot 13$.



2. Сторона правильного 8-угольника равна 10. В меньший 8-угольник, образованный диагоналями данного 8-угольника, вписана окружность (см. рис.). Чему равен ее радиус?

А) 10; **Б)** 7,5; **В)** 5; **Г)** 2,5; **Д)** 2.

3. Призма имеет 2013 граней. Сколько ребер у такой призмы?

А) 2011; **Б)** 2013; **В)** 4022; **Г)** 4024; **Д)** 6033.

4. Кубический корень из числа 3^{3^3} равен:

А) 3^3; **Б)** 3^{3^3-1}; **В)** 3^{2^3}; **Г)** 3^{3^2}; **Д)** $\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}}$.

5. Год 2013 обладает таким свойством, что он записывается четырьмя последовательными цифрами: 0, 1, 2, 3. Сколько лет назад был последний момент, когда номер года также можно было записать какими-то четырьмя последовательными цифрами?

А) 467; **Б)** 527; **В)** 581; **Г)** 693; **Д)** 990.

6. Пусть f – линейная функция, такая, что $f(2013) - f(2001) = 100$. Чему равно значение $f(2031) - f(2013)$?

А) 75; **Б)** 100; **В)** 120; **Г)** 150; **Д)** 180.

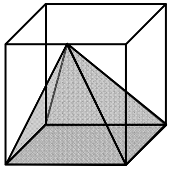
7. Известно, что $2 < x < 3$. Сколько из следующих двойных неравенств являются верными: $4 < x^2 < 9$, $4 < 2x < 9$, $6 < 3x < 9$, $0 < x^2 - 2x < 3$?

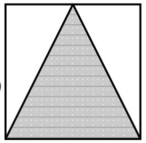
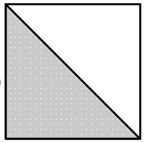
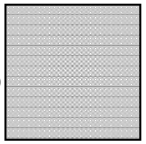
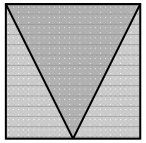
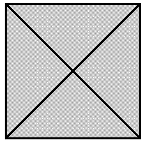
А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3; **Д)** 4.

8. Шесть супергероев поймали 20 злодеев. Первый супергерой поймал одного злодея, второй – двух злодеев, третий – трех злодеев. Четвертый супергерой поймал больше злодеев, чем любой из остальных пяти. Какое наименьшее число злодеев мог поймать четвертый супергерой?

А) 7; **Б)** 6; **В)** 5; **Г)** 4; **Д)** 3.

9. В прозрачном кубе на рисунке справа находится непрозрачная пирамида. Ее основание совпадает с нижней гранью куба, а вершина является серединой ребра верхней грани куба. Если посмотреть на куб сверху, снизу, сзади, спереди, слева и справа, то какой из следующих видов невозможен?



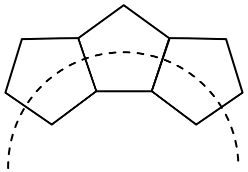
А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

10. Когда некоторое вещество плавится, его объем увеличивается на $1/12$. На сколько его объем уменьшается, когда оно, наоборот, кристаллизуется?

А) на $1/10$; **Б)** на $1/11$; **В)** на $1/12$; **Г)** на $1/13$; **Д)** на $1/14$.

Задачи с 11 по 20 оцениваются по 4 балла

11. У Раи есть одинаковые плитки в форме правильного пятиугольника. Она прикладывает их сторонами друг к другу так, чтобы получить замкнутую круговую дорожку, как показано на рисунке. Сколько всего плиток ей понадобится?

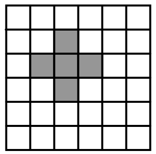
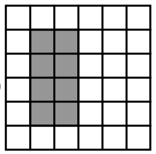
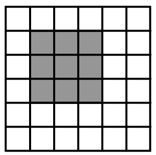
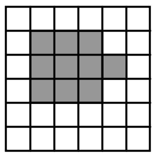
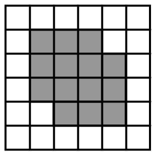


А) 8; **Б)** 9; **В)** 10; **Г)** 12; **Д)** 15.

12. Сколько существует натуральных чисел n, таких, что $3n$ и $n/3$ являются целыми трехзначными числами?

А) 12; **Б)** 33; **В)** 34; **Г)** 100; **Д)** 300.

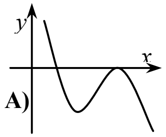
13. Круглый коврик положили в ванной на пол, замощенный квадратными плитками. Каждая плитка, полностью покрытая ковром, оказалась серой. Каким не мог быть вид пола в ванной?

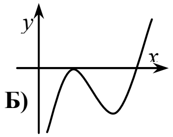
А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

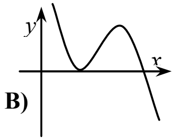
14. Рассмотрим утверждение о функции f, заданной на множестве целых чисел и принимающей целые значения: «Для любого четного x значение $f(x)$ также четное». Какое из следующих утверждений является противоположным данному?

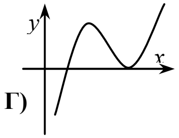
А) «Для любого четного x значение $f(x)$ – нечетное»;
Б) «Для любого нечетного x значение $f(x)$ – четное»;
В) «Для любого нечетного x значение $f(x)$ – нечетное»;
Г) «Существует четное x, такое, что значение $f(x)$ – нечетное»;
Д) «Существует нечетное x, такое, что значение $f(x)$ – нечетное».

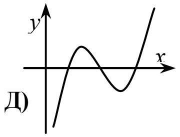
15. На каком из следующих рисунков изображен график функции $f(x) = (a-x)(b-x)^2$, где $a < b$?

А) 

Б) 

В) 

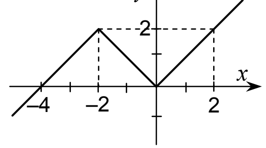
Г) 

Д) 

16. Сколько существует прямоугольников, одна из сторон которого равна 5, и которые можно разрезать на квадрат и прямоугольник так, что площадь одного из них (прямоугольника или квадрата) будет равна 4?

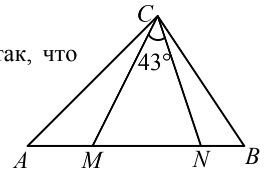
А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

17. Володя нарисовал график функции $y = f(x)$, состоящий из двух лучей и отрезка (см. рис.). Сколько решений имеет уравнение $f(f(f(x))) = 0$?



А) 4; **Б)** 3; **В)** 2; **Г)** 1; **Д)** 0.

18. В треугольнике ABC на стороне AB отмечены точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Найдите $\angle ACB$, если $\angle MCN = 43°$.



А) 86°; **Б)** 89°; **В)** 90°; **Г)** 92°; **Д)** 94°.

19. Сколько существует пар $(x;\ y)$ натуральных чисел x и y, таких, что $x^2y^3 = 6^{12}$?

А) 6; **Б)** 8; **В)** 10; **Г)** 12; **Д)** другой ответ.

20. В коробке находится 900 карточек с числами от 100 до 999 (каждое число – ровно на одной карточке). Какое наименьшее число карточек нужно, не глядя, вынуть из коробки, чтобы среди них наверняка нашлись три карточки с числами, имеющими одинаковые суммы цифр?

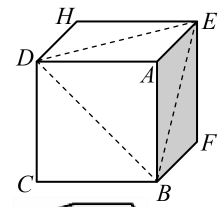
А) 51; **Б)** 52; **В)** 53; **Г)** 54; **Д)** 55.

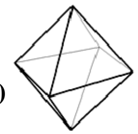
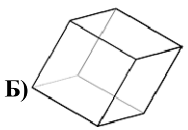
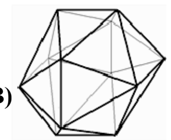
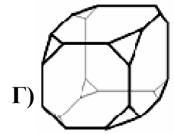
Задачи с 21 по 30 оцениваются по 5 баллов

21. Сколько существует пар $(x;\ y)$, целых чисел x и y ($x \le y$), произведение которых в 5 раз больше их суммы?

А) 4; **Б)** 5; **В)** 6; **Г)** 7; **Д)** 8.

22. Рассмотрим вершину A куба на рисунке справа. Проведем разрез по плоскости, проходящей через три соседние с A вершины (т.е. через D, E и B). Рассмотрим остальные 7 вершин куба и проведем такие же разрезы. Как будет выглядеть после всех разрезов та часть куба, которая содержит его центр?



А)  **Б)**  **В)**  **Г)** 

Д) центр куба будет принадлежать нескольким частям, полученным после всех разрезов.